GLAVA 6

Tjuringova mašina

Sve što znamo o strvarnosti proističe iz ogleda
i završava se u njemu.
Albert Ajnštajn

1. Unutrašnja stanja

Sada ćemo razmatrati jednu posebnu varijantu Post-Tjuringovog jezika koja je bliža Tjuringovoj originalnoj ideji. Umjesto da razmišljamo o instrukcijama, zamislimo uređaj koji može imati različita unutrašnja stanja. Uređaj, tokom rada, prolazi preko polja linearne trake, isto kao kod Post-Tjuringovih programa. Kombinacija trenutnog unutrašnjeg stanja i simbola na polju određuje akciju koju uređaj preduzima u sljedećem koraku. Akcija može da bude ili upisivanje simbola u polje trake, ili pomjeranje za jedno polje ulijevo ili udesno na traci. Pri svakoj akciji uređaj može (ali ne mora) i da promijeni svoje unutrašnje stanje.

Koristićemo simbole q_1, q_2, q_3,... da označimo unutrašnja stanja, a simbole s_0, s_1, s_2,... da označimo simbole koji se mogu pojaviti na traci, gdje ćemo, kako smo to već ranije radili, uzeti da je s_0=B, poseban, blanko simbol.

Definišimo Tjuringove četvorke, koje se sastoje od q i s simbola i dva posebna simbola R i L, kao četvorke koje mogu imati jedan od sljedećih oblika:

(1) q_i s_j s_k q_l,

(2) q_i s_j R q_l,

(3) q_i s_j L q_l,

Četvorkama (1), (2), (3) dajemo sljedeće značenje:

Četvorka (1) označava da nalazeći se u stanju q_i, i na polju sa simbolom s_j, uređaj u to polje upisuje simbol s_k,i prelazi u stanje q_l.

Četvorka (2) označava da nalazeći se u stanju q_i, i na polju sa simbolom s_j, uređaj se pomjera udesno (RIGHT) za jedno polje, i prelazi u stanje q_l.

Četvorka (3) označava da nalazeći se u stanju q_i, i na polju sa simbolom s_j, uređaj se pomjera ulijevo (LEFT) jedno polje, i prelazi u stanje q_l.

Definišimo sada Tjuringovu mašinu kao konačan skup četvorki navedenog tipa, ali uz uslov da ne postoje dvije četvorke sa istim parom q_is_j. U stvari, kada se ovaj uslov ne zahtijeva govorimo o nedeterminističkoj Tjuringovoj mašini. Kada je uslov ispunjen govori se o determinističkoj Tjuringovoja mašini, koju ćemo sada detaljnije analizirati.

Azbuka neke date Tjuringove mašine M sastoji se od svih simbola koji se nalaze u četvorkama mašine M, izuzev simbola s_0. Ovaj simbol služi u posebne svrhe koje će biti jasne kasnije.

Usvojićemo da Tjuringova mašina uvijek počinje rad sa stanjem q_1. Tjuringova mašina završava rad kada se nađe u stanju q_i, na polju sa simbolom s_j, i kad među četvorkama koje definišu datu mašinu nema takve koja počinje parom q_is_j.

Uz gore navedene uslove i ulazno-izlazne konvencije, koje su usvojene kod Post-Tjuringovog programa, može se kazati, da neka data Tjuringova mašina M, izračunava parcijalne funkcije f na A*, za datu azbuku A.

Možemo reći da data Tjuringova mašina M, izračunava funkciju striktno, pod istim uslovima kao kod Post-Tjuringovog programa.

Da budemo još precizniji. Tjuringova mašina M izračunava parcijalnu funkciju f na A, striktno ako je:

1. A azbuka mašine M.

2. Mašina M zaustavlja rad u konfiguraciji:

By

q_i

pri čemu y ne sadrži blanko simbole.

Primjer 6.1. Neka je s_0=B i neka je $\{1\}$ azbuka Tjuringove mašine definisane sljedećim četvorkama:

q_1 B R q_2
q_2 1 R q_2
q_2 B 1 q_3
q_3 1 R q_3
q_3 B 1 q_1.

Neka je početna konfiguracija trake:

...B111B....

Tada možemo provjeriti šta u tom slučaju mašina radi, simulacijom njenog rada kako slijedi:

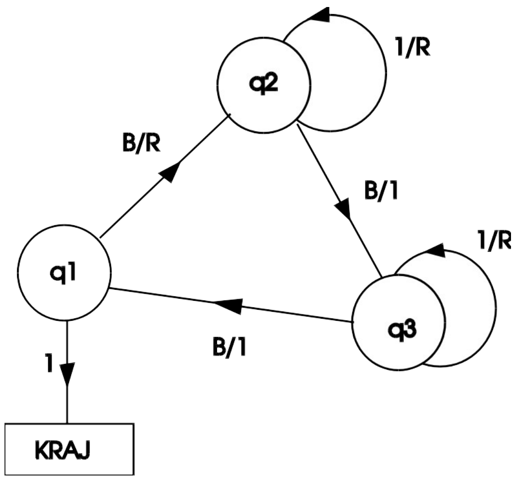
B111B, B111B,..., B111B, B111B, B1111B, B1111B, B11111B

q_1 q_2 q_2 q_3 q_3 q_1

Mašina prestaje sa radom u posljednjem prikazanom koraku, jer ne postoji četvorka koja počinje parom $q_1 1$. Možemo se lako uvjeriti da ova Tjuringova mašina izračunava funkciju f(x)=x+2, kada azbuku shvatimo kao unarnu (baze 1) prezentaciju brojeva.

Kao što se iz gornjeg primjera vidi, praćenje rada mašine može biti problematično za simulaciju. Zato ćemo prikazati jedan metod predstavljanja Tjuringove mašine koji značajno pojednostavljuje praćenje rada mašine.

To su dijagrami tranzicije stanja, kao na Slici 1.1, koja prikazuje Tjuringovu mašinu iz navedenog primjera. Kružićima su označena unutrašnja stanja mašine, pravougaonikom završno stanje, a usmjerenim linijama prelasci (tranzicije) iz stanja u stanje za svaku kombinaciju prelazaka, definisanih četvorkama mašine. Uz linije tranzicije dat je uslov za tranziciju, kao i simbol koji se upisuje na traku tokom tranzicije.



Slika 1.1 Tranzicioni dijagram

Sada možemo dokazati:

Teorema 1.1 Svaka parcijalno izračunljiva funkcija koja može biti izračunata Post-Tjuringovim programom, može biti izračunata Tjuringovom mašinom sa istom azbukom.

Dokaz. Neka je Π dati Post-Tjuringov program koji se sastoji od instrukcija $I_1,\dots,I_k$, i neka je $s_0,s_1,\dots,s_n$ lista svih simbola pomenutih u Π. Konstruisaćemo Tjuringovu mašinu M koja simulira Π.

Ideja se sastoji u tome da se mašina M nađe u stanju q_i, upravo kada program Π treba da izvrši instrukciju I_i.

Sada, ako je I_i instrukcija PRINT s_k, tada mašini M dodajemo sve četvorke tipa:

$q_i \ s_j \ s_k \ q_{i+1}, \quad j=0,1,...,n$

Ako je I_i instrukcija RIGHT, tada dodajemo u M četvorke:

$q_i \ s_j \ R \ q_{i+1}, \quad j=0,1,...,n$

Ako je I_i instrukcija LEFT, tada dodajemo u M četvorke:

$q_i \ s_j \ L \ q_{i+1}, \quad j=0,1,...,n$

Na kraju, ako je I_i, instrukcija IF s_k GOTO L, neka je m najmanji broj takav da I_m ima label L, ili m = k+1 ako instrukcija sa labelom L ne postoji. Sada dodajemo u M četvorku:

$q_i \ s_k \ s_k \ q_m,$

kao i sve četvorke:

$q_i \ s_j \ s_j \ q_{i+1}, \quad j=0,1,...,n; \ j\neq k.$

Sada je jasno da akcije mašine M potpuno odgovaraju instrukcijama programa Π, čime je dokaz simulacijom završen.

Uz korišćenje Posljedice 6.4 iz Glave 5 i dokaza Teoreme 1.1 mozemo izreći i sljedeću teoremu.

Teorema 1.2. Neka je f m-arna parcijalno izračunljiva funkcija na jeziku A* , date azbuke A. Tada postoji Tjuringova mašina M, koja izračunava f striktno.

Posebno je interesantno primijeniti ovu teoremu na slučaj A=$\{1\}$. Sada, akoj je f(x_1,...,x_m) bilo koja parcijalno izračunljiva funkcija na N, tada postoji Tjuringova mašina koja izračunava f samo korišćenjem simbola B i 1. Početna konfiguracija u takvom slučaju je:

$B1^{[x_1]}B...B1^{[x_m]}$

q_1

a završna konfiguracija je:

$B1^{[f(x_1,...,x_m)]}$

qk+1