GLAVA 4

Univerzalni program

Nesavršenstvo nije negacija savršenstva.
To se samo cjelina iskazuje u djelovima,
to se beskraj otkriva u granicama.
Rabindranat Tagore

6. Teorema o rekurziji

Jedan od najvažnijih rezultata teoreme o parametru je njena upotreba za dokazivanje teoreme o rekurziji.

Teorema 6.1. (Teorema o rekurziji) Neka je $g(z,x_1,...,x_m)$ parcijalno izračunljiva funkcija od $m+1$ varijable. Tada postoji broj e takav da je:

$$\Phi_e^{(m)}(x_1,...,x_m)=g(e,x_1,...,x_m).$$

Dokaz. Posmatrajmo parcijalno rekurzivnu funkciju

$$g(S_m^1(v,v),x_1,...,x_m)$$

gdje je S_m^1 funkcija koja se javlja u teoremi o parametru. Sada možemo za neko z_0 pisati:

$$g(S_m^1(v,v),x_1,...,x_m)=\Phi^{(m+1)}(x_1,...,x_m,v,z_0)\ =\Phi^m(x_1,...,x_m,S_m^1(v,z_0)).$$

gdje smo upotrijebili teoremu o parametrizaciji. Ako stavimo da je $v = z_0$ i $e = S_m^1(z_0,z_0)$, imamo

$$g(e,x_1,...,x_m)=\Phi^{(m)}(x_1,...,x_m,e)=\Phi_e^{(m)}(x_1,...,x_m).$$

što dokazuje teoremu.

Jedna od mnogih značenja teoreme o rekurziji je da ona omogućava da se neka funkcija definiše programom koji se koristi za izračunavanje te iste funkcije kao dijelom te definicije.

Posljedica 6.2 Postoji takav broj e da je za svako x

$$\Phi_e(x)=e.$$

Dokaz. Posmatrajmo izračunljivu funkciju

$$g(z,x)=u_1^2(z,x)=z.$$

Primjenom teoreme o rekurziji nalazimo broj e takav da je

$$\Phi_e(x)=g(e,x)=e$$

Izazovno je da se bude malo metaforičan u vezi sa ovim rezultatom. Program e "konzumira" svoju "okolinu" (odnosno ulaz x) i daje kao rezultat "kopiju" samog sebe. To je u minijaturi jedan samoreprodukujući organizam.

Slijedi još jedna primjena teoreme o rekurziji.

Teorema 6.3 (Teorema o fiksnoj tački)
Neka je f(z) izračunljiva funkcija. Tada postoji broj e takav da je:
$\Phi_{f(e)}(x)=\Phi_e(x)$, za svako x.

Dokaz. Neka je $g(z,x)=\Phi_{f(z)}(x)$, neka parcijalno izračunljiva funkcija. Upotrebom teoreme o rekurziji znamo da postoji broj e takav da je:

$$\Phi_e(x)=g(e,x)=\Phi_{f(e)}(x).$$

Vježbe

1. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija h(u), takva da je: $\Phi(x,h(u))=\Phi(x,\Phi(h(u),u))$.