Univerzalni program

Nesavršenstvo nije negacija savršenstva.
To se samo cjelina iskazuje u djelovima,
to se beskraj otkriva u granicama.
Rabindranat Tagore

5. Teorema o parametrizaciji

Teorema o parametru (koja se još naziva i teorema o iteraciji) je jedan važan tehnički rezultat koji pokazuje vezu među različitim funkcijama $\Phi^{(n)}(x_1,\ldots,x_n,y)$, za razne vrijedosti n.

Teorema 5.1 **(**Teorema o parametru) Za svako n,m > 0 postoji primitivno rekurzivna funkcija $S^n_m(u_1,u_2,\ldots,u_n,y)$ takva da je:

$$\Phi^{(m+n)}(x_1,\ldots,x_m,u_1,\ldots,u_n,y)=\Phi^{(m)}(x_1,\ldots,x_m,S^n_m(u_1,u_2,\ldots,u_n,y)) \tag{5.1}$$

Pretpostavimo da su vrijednosti $u_1,u_2,\ldots,u_n$, fiksirane i da imamo na umu neku vrijednost y. Lijeva strana jednačine (5.1) je parcijalno izračunljiva funkcija od m varijabli $x_1,\ldots,x_m$, Neka je q broj programa koji izračunava ovu funkxiju od m varijabli. Tada imamo:

$$\Phi^{(m+n)}(x_1,\ldots,x_m,u_1,\ldots,u_n,y) = \Phi^{(m)}(x_1,\ldots,x_m,q).$$

Teorema o parametrizaciji nam kaže da, ne samo da postoji takav broj q, već i da se može izračunati iz $u_1,\ldots,u_n,y$.

Nećemo izvoditi dokaz ove teoreme. Umjesto toga pokazaćemo njenu upotrebu na jednom primjeru.

Primjer. Naći izračunljivu funkciju g(u,v) takvu da je:

$$\Phi_u(\Phi_v (x)) = \Phi_{g(u,v)} (x).$$

Promjenom označaka imamo:

$$\Phi_u(\Phi_v (x)) = \Phi(\Phi (x,v),u)$$

pa je:

$$\Phi_u(\Phi_v(x)) = \Phi^{(3)}(x,u,v,z_0)$$

za neko z_0 .

Uz pomoć teoreme o parametrizaciji imamo:

$$\Phi^{(3)}(x,u,v,z_0)=\Phi(x,S_1^2(u,v,z_0))=\Phi_{S_1^2(u,v,z_0)}(x).$$

Vježbe

1. Za datu parcijalno izračunljivu funkciju f(x,y) naći primitivno rekurzivnu funkciju g(u,v) takvu da je:

$$\Phi_{g(u,v)}(x)=f(\Phi_u(x),\Phi_v(x)).$$

2. Pokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija g(u,v,w) takva da je $\Phi^{(3)}(u,v,w,z)=\Phi_{g(u,v,w)}(z)$.