GLAVA **3**

Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

2. Rekurzija

Pretpostavimo da je k neki fiksiran broj i da je:

$$h(0) = k,$$
$$h(t+1) = g(t,h(t)), \qquad (2.1)$$

gdje je g neka totalna funkcija od dvije varijable. Za funkciju h kažemo da je dobijena **rekurzijom** od funkcije g.

Teorema 2.1. Neka je h funkcija dobijena rekurzijom (2.1) od funkcije g i neka je g izračunljiva funkcija. Onda je i h izračunljiva funkcija.

Dokaz. Sljedeći program izračunava funkciju h.

```
     Y ← Y + 1
     Y ← Y + 1
     .
     .              }k linija program
     .
     Y ← Y + 1
[A]  IF X = 0 GOTO E
     Y ← g(Z,Y)
     Z ← Z + 1
     X ← X - 1
     GOTO A
```

Nešto složeniji slučaj rekurzije je kada imamo:

$$h(x_1,\ldots,x_n,0) = f(x_1,\ldots,x_n),$$
$$h(x_1,\ldots,x_n,t+1) = g(t,h(x_1,\ldots,x_n,t), x_1,\ldots,x_n) \qquad (2.2)$$

Ovdje se za funkciju h od n+1 varijable kaže da je dobijena rekurzijom od totalnih funkcija f (od n varijabli) i g (od n+2 varijable).

Teorema 2.2. Neka je h funkcija dobijena od f i g rekurzijom, i neka su f i g izračunljive funkcije. Onda je i funkcija h izračunljiva funkcija.

Dokaz. Sljedeći program izračunava funkciju h.

```
        Y ← f( X_1,...,X_n)
[A]     IF X_{n+1} = 0 GOTO E
        Y ← g(Z,Y, X_1,...,X_n)
        Z ← Z + 1
        X_{n+1} ← X_{n+1} - 1
        GOTO A
```

Ovim je teorema 2.2. dokazana.