GLAVA **3**

Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

5. Primitivno rekurzivni predikati

Podsjetimo se da smo u Glavi 1, poglavlje 4, definisali predikate kao Bulovske totalne funkcije koje imaju vrijednost 0 ili 1.
Zato sada, nastavljamo listu primitivno rekurzivnih funkcija sa predikatima.

9. Predikat x = y.
Ovaj predikat ima vrijednost 1 kada varijable x i y imaju istu vrijednost, u svim drugim slučajevima predikat ima vrijednost 0.
Možemo gornji predikat predstaviti u obliku funkcije d(x,y) kako slijedi:

$$d(x,y)=\begin{cases} 1, & ako\ je\ x=y \\ 0, & ako\ je\ x\neq y \end{cases}$$

Da je ova funkcija (a time i predikat) primitivno rekurzivna vidi se iz jednakosti:

$$d(x,y) = \alpha\ (|\ x - y|),$$

pri čemu je za α i $|x - y|$ već pokazano da su primitivno rekurzivne funkcije.

10. Predikat $x \leq y$. Ovaj predikat se može jednostavno izraziti primitivno rekurzivnom funkcijom $\alpha(x \div y)$.

Teorema 5.1. Neka je ζ PRZ klasa. Ako su P, Q predikati koji pripadaju klasi ζ, onda klasi ζ pripadaju i predikati ~P, P $^{\vee}$ Q, P &Q.

Dokaz. Pošto je ~P = α (P), slijedi da ~P pripada ζ. Takođe je P&Q = P*Q pa i P&Q pripada ζ.

Na kraju, uz pomoć De Morganovih pravila imamo:

$$P \vee Q = \sim (\sim P\ \&\ \sim Q\ )$$

što pokazuje da i P $^{\vee}$ Q pripada ζ.

Posljedica 5.2. Ako su P i Q primitivno rekurzivni predikati, onda su i predikati ~P, P $^{\vee}$ Q, P & Q primitivno rekurzivni.

Posljedica 5.3. Ako su P,Q izračunljivi predikati, onda su i predikati $\sim P$, $P \vee Q$, $P \,\&\, Q$ izračunljivi.

11. Predikat $x < y$.

Možemo da pišemo:

$$x < y \;\Leftrightarrow\; x \leq y \;\&\; \sim (x = y)$$

ili još jednostavnije

$$x < y \;\Leftrightarrow\; \sim (y \leq x),$$

pa je predikat $x < y$ primitivno rekurzivan.

Teorema 5.4 (Definicija po slučaju) Neka je ζ PRZ klasa. Neka funkcije g,h i predikat P pripadaju klasi ζ.

Neka je:

$$f(x1,...,xn)=\begin{cases} g(x_1,...,x_n), & ako\ je\ P(x_1,...,x_n) \\ h(x_1,...,x_n), & inace \end{cases}$$

Onda f pripada klasi ζ.

Dokaz. Rezultat je očigledan jer je:

$$f(x_1,...,x_n)=g(x_1,...,x_n)*P(x_1,...,x_n)+h(x_1,...,x_n)*\alpha(P(x_1,...,x_n)).$$