

Malo čiste matematike

Nema ništa praktičnije od dobre teorije.

Leonardo Da Vinči

4. Predikati

Pod predikatom, ili Bulovskom funkcijom, na skupu S , podrazumijevamo totalnu funkciju P na S , takvu da za svako $a \in S$ važi:

$$P(a) = \text{TRUE} \quad \text{ili} \quad P(a) = \text{FALSE},$$

gdje su TRUE i FALSE par posebnih objekata, koje zovemo vrijednostima istinitosti. Često kažemo da je $P(a)$ istinito (tačno) ako je $P(a) = \text{TRUE}$, a $P(a)$ neistinito (netačno) ako je $P(a) = \text{FALSE}$. Za naše svrhe, pogodno je da objektima TRUE i FALSE pridružimo brojeve kako slijedi:

$$\text{TRUE} = 1 \quad \text{i} \quad \text{FALSE} = 0.$$

Predikati na skupu S se obično zadaju pomoću izraza, koji postaju iskazi, istiniti ili neistiniti, kada se varijable zamijene sa određenim elementima skupa S .

Tako izraz $x < 5$ definiše predikat na skupu N kao što slijedi:

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Osnovne operacije sa predikatima prikazane su u tabeli 4.1

Tabela 4.1

P	$\sim P$	P	Q	$P \& Q$	$P \vee Q$
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
		1	0	0	1
		1	1	1	1

Tako, ako su P i Q predikati na skupu S , onda postoje i predikati $\sim P$, $P \& Q$, $P \vee Q$. Predikat $\sim P$ je istinit kada je predikat P neistinit i obrnuto. Predikat $P \& Q$ je istinit samo kada su i P i Q istiniti, inače je neistinit. Predikat $P \vee Q$ je istinit kada su ili P ili Q , ili oba istiniti, a neistinit samo kada su i P i Q neistiniti.

Za dati predikat P na S , kada postoji podskup R od S takav da je $P(a) = 1$ za svako $a \in R$ možemo pisati:

$$R = \{a \in S | P(a)\}.$$

Obrnuto, za dati podskup R od S izraz: $x \in R$ definiše predikat na S kako slijedi

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x \in R \\ 0, & x \notin R \end{cases}$$

Naravno, u ovom slučaju je:

$$R = \{x \in S | P(x)\}.$$

Predikat P se tada naziva karakterističnom funkcijom skupa R . Tijesna veza između predikata i skupova ogleda se kroz sljedeće jednakosti:

$$\{x \in S | P(x) \& Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cap \{x \in S | Q(x)\},$$

$$\{x \in S | P(x) \vee Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cup \{x \in S | Q(x)\},$$

$$\{x \in S | \sim P(x)\} = S - \{x \in S | P(x)\}.$$

Da označimo da dva izraza, koja sadrže varijable, definišu isti predikat, korišćemo simbol \Leftrightarrow . Tako, na primjer, imamo:

$$x < 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4.$$

De Morganova pravila mogu biti primijenjena i na predikatima kako slijedi:

$$P(x) \& Q(x) \Leftrightarrow \sim(\sim P(x) \vee \sim Q(x)),$$

$$P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow \sim(\sim P(x) \& \sim Q(x)).$$