GLAVA **3**

Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

3. PRZ klase funkcija

Definisaćemo tri elementarne funkcije koje će nam služiti da, kompozicijom i rekurzijom, definišemo cijelu jednu klasu funkcija.

1. Funkciju **sukcesija** definišemo sa: $s(x) = x + 1$.

2. Funkciju **anulacija** definišemo sa: $n(x) = 0$.

3. Funkciju **projekcija** definišemo sa: $u^n_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$.

Funkcije s, n i u ćemo zvati **inicijalnim funkcijama**.

Definicija. Klasa totalnih funkcija ζ naziva se PRZ (primitivno rekurzivno zatvorena) klasom ako:

1. Inicijalne funkcije pripadaju klasi ζ,
2. Funkcije dobijene kompozicijom i rekurzijom funkcija iz klase ζ takođe pripadaju klasi ζ.

Teorema 3.1. Klasa izračunljivih funkcija je PRZ klasa.

Dokaz. Imajući u vidu teoreme 1.1, 2.1 i 2.2, preostaje nam jedino da dokažemo da su inicijalne funkcije izračunljive.

Funkciju $s(x) = x+1$ izračunava program:

$$Y \leftarrow Y + 1.$$

Funkciju $n(x) = 0$ izračunava prazan program.

Funkciju $u^n_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$. izračunava program:

$$Y \leftarrow X_i.$$

Ovim je dokaz završen.

Definicija. Neka funkcija naziva se primitivno rekurzivnom, ako se može dobiti od inicijalnih funkcija konačnim brojem primjena kompozicije i rekurzije.

Posljedica 3.2. Klasa primitivno rekurzivnih funkcija je PRZ klasa.

Teorema 3.3. Funkcija je primitivno rekurzivna, ako i samo ako pripada svakoj PRZ klasi.

Dokaz. Ako funkcija pripada svakoj PRZ klasi onda, zbog posljedice 3.2, pripada i klasi primitivno rekurzivnih funkcija. Obrnuto, neka je funkcija f primitivno rekurzivna i neka je ζ neka PRZ klasa. Treba da dokažemo da f pripada ζ. Pošto je f primitivno rekurzivna funkcija, onda postoji niz $f_1,f_2,...,f_n$ funkcija takvih da je $f_n=f$, i da svako f_i, iz niza funkcija, bilo inicijalna funkcija bilo funkcija koja se može dobiti kompozicijom i rekurzijom od funkcija koje joj predhode. Inicijalne funkcije po definiciji pripadaju PRZ klasi ζ. Funkcije dobijene kompozicijom i rekurzijom takođe pripadaju klasi ζ. Znaci sve funkcije iz niza $f_1,...,f_n$, pripadaju klasi ζ. Kako je $f_n=f$, to i f pripada klasi ζ.

Posljedica 3.4. Svaka primitivno rekurzivna funkcija je izračunljiva.

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.3 slijedi da svaka primitivno rekurzivna funkcija pripada PRZ klasi izračunljivih funkcija.

Postoje izračunljive funkcije koje nijesu primitivno rekurzivne. Zato je skup primitivno rekurzivnih funkcija pravi podskup izračunljivih funkcija.