GLAVA **3**

Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

4. Neke primitivno rekurzivne funkcije

Sada ćemo prikazati jednu kratku listu primitivno rekurzivnih funkcija. Time što su primitivno rekurzivne one su i izračunljive, kako je to ranije utvrđeno.

1. Funkcija f(x,y) = x + y. Rekurzivni oblik funkcije f je:

$$f(x,0) = x$$
$$f(x, y+1) = f(x,y) + 1.$$

Treba još da pokažemo da se funkcija f može dobiti od inicijalnih funkcija. Zaista,

$$f(x,0) = u^1{}_1(x)$$
$$f(x, y+1) = s(u^3{}_2(y,f(x,y),x)).$$

gdje su u i s inicijalne (primitivno rekurzivne) funkcije. Zato je i f(x,y) = x+y primitivno rekurzivna.

2. Funkcija f(x,y) = x*y. Rekurzivni oblik funkcije f je:

$$h(x,0) = 0$$
$$h(x, y+1) = h(x,y) + x.$$

Možemo pisati:

$$h(x,0) = n(x)$$
$$h(x, y+1) = f(u^3{}_2(y,h(x,y),x),u^3{}_3(y,h(x,y),x).$$

gdje su n i u inicijalne funkcije, a $f(x_1,x_2)= x_1+x_2$, funkcija za koju je već pokazano da je primitivno rekurzivna. Prema tome funkcija f(x,y) = x*y se može dobiti kompozicijom i rekurzijom primitivno rekurzivnih funkcija, pa je tako i ona primitivno rekurzivna.

3. Funkcija f(x) = x! (faktorijel). Rekurzivni oblik funkcije f je:

$$0! = 1,$$

$(x+1)! = x!*s(x).$

Ili,

$h(0) = 1,$
$h(t+1) = g(t, h(t))$

gdje je $g(x_1,x_2)=s(x_1)*x_2$ primitivno rekurzivna (vidi funkciju 2.).

U narednim primjerima ostavljamo čitaocu da prikaže rekurziju u detalnjijoj formi.

4. Funkcija $f(x,y) = x^y$.

$x^0 = 1,$
$x^{y+1}=x^y*x.$

Napomena: u prvoj jednačini je usvojeno da je $0^0 = 1$.

5. Funkcija p(x) (predhodnik od x) se definise kao što slijedi:

$$p(x) = p(x)=\begin{cases} x-1 & ako\ je\ x \neq 0 \\ 0 & ako\ je\ x = 0 \end{cases}$$

Ova funkcija odgovara naredbi $X \leftarrow X-1$ jezika S.

Rekurzivni oblik funkcije p je:

$p(0) = 0,$
$p(t+1) = t.$

6. Funkcija $f(x,y) = x \div y$ definisana sa:

$$x \div y = \begin{cases} x - y, & ako\ je\ x \geq y \\ 0, & ako\ je\ x < y \end{cases}$$

Rekurzivni oblik funkcije $x \div y$ je:

$x \div 0 = x,$
$x \div (t+1) = p(x \div t)$

7. Funkcija $f(x,y) = |x-y|$

Funkcija $|x-y|$ može biti prikazana kao:

$|x-y| =(x \div y) + (y \div x)$

8. Funkcija α (x) definisana sa:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & ako\ je\ x = 0 \\ 0 & ako\ je\ x \neq 0 \end{cases}$$

je primitivno rekurzivna jer je α (x) = 1 ÷ x, ili u rekurzivnom obliku:

α (0) = 1,
α (t+1) = 0.

Vježbe

1. Pokazati da je za svako k funkcija f(x) = k primitivno rekurzivna.
2. Dokazati da ako su f(x) i g(x) primitivno rekurzivne funkcije, onda je i f(x) + g(x) primitivno rekurzivna funkcija.
3. *(a) Neka je E(x) = 0 ako je x paran broj, a E(x) = 1 ako je x neparan. Pokazati da je E(x) primitivno rekurzivna funkcija.
   (b) Neka je H(x) = x/2 ako je x paran, a H(x) = (x-1)/2 ako je x neparan. Pokazati da je H(x) primitivno rekurzivna.
4. *Neka je g(x) primitivno rekurzivna funkcija, i neka je f(0,x)=g(x) i f(n+1,x)=f(n,f(n,x)). Dokazati da je f(n,x) primitivno rekurzivna.