GLAVA **3**

Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

7. Minimalizacija

Neka $P(t,x_1,\ldots,x_n)$ pripada nekoj PRZ klasi ζ. Onda iz teoreme 6.1. slijedi da funkcija:

$$g(y,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{u=0}^{y} \prod_{t=0}^{u} \alpha\,(P(t,x_1,\ldots,x_n))$$

takođe pripada klasi ζ. Analizirajmo funkciju g. Pretpostavimo da je za neko $t_0 \leq y$:

$$P(t,x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad \text{za svako } t < t_0,$$

ali da je

$$P(t_0,x_1,\ldots,x_n) = 1,$$

to jest, da je t_0 najmanje vrijednost za $t \leq y$, za koju je $P(t,x_1,\ldots,x_n)$ istinito. Onda je:

$$\prod_{t=0}^{u} \alpha\,(P(t,x_1,\ldots,x_n)) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ u < t_0 \\ 0, & ako\ je\ u \geq t_0 \end{cases}$$

Onda je

$$g(y,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{u < t_0} 1 = t_0,$$

tako da je $g(y,x_1,\ldots,x_n)$ najmanja vrijednost t, za koju je $P(t,x_1,\ldots,x_n)$ istinito, ako takva vrijednost postoji, inače je 0.

Upotrebom teorema 5.4 i 6.3 dolazimo do

Teorema 7.1. Ako $P(t,x_1,\ldots,x_n)$ pripada nekoj PRZ klasi ζ i ako je $f(y,x_1,\ldots,x_n)=\min_{t \leq y} P(t,x_1,\ldots,x_n)$ onda i f pripada klasi ζ.

Operacija "$\min_{t \le y}$" naziva se ograničenom minimalizacijom.

Nastavljamo listu primitivno rekurzivnih funkcija.

14. Funkcija $f(x,y) = \lfloor x/y \rfloor$ ("cjelobrojni dio pri dijeljenju").
 Na primjer, $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$, a $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$.

Kako je:

$$\lfloor x/y \rfloor = \min_{t \le y}\{(t+1)*y > x\}$$

to je $\lfloor x/y \rfloor$ primitivno rekurzivna.

15. $R(x,y)$. $R(x,y)$ je ostatak kada se x podijeli sa y.

Kako je:

$$\frac{x}{y} = \lfloor x/y \rfloor + \frac{R(x,y)}{y}$$

imamo da je:

$$R(x,y) = x \div (y*\lfloor x/y \rfloor)$$

pa je tako $R(x,y)$ primitivno rekurzivna.

16. p_n (n-ti prost broj).

Da bi funkciju p_n učinili totalnom definišimo $p_0 = 0$. Sada imamo p_0,=0, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ itd. Posmatrajmo rekurzivnu jednačinu:

$$p_0=0,$$
$$p_{n+1} = \min_{t \le pn!} \{\text{Prost}(t) \ \& \ t > p_n\}$$

Da bi provjerili da je gornja rekurzija tačna moramo dokazati nejednakost:

$$p_{n+1} \le (p_n!) + 1. \qquad (7.1)$$

Za svako p_i, $i \le n$ važi:

$$\frac{(p_n!)+1}{p_i} = K + \frac{1}{p_i}$$

gdje je K cio broj. Odavde zaključujemo da $(p_n!)+1$ nije djeljiv ni sa jednim od prostih brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Zato je $(p_n!)+1$ ili prost broj, ili je djeljiv sa sa nekim prostim brojem q takvim da je $p_n < q \le (p_n!)+1$, što dokazuje nejednakost (7.1).

Ovo je u stvari Euklidov dokaz da ima beskonačno mnogo prostih brojeva.

Da bi dokaz učinili očiglednijim uvedimo primitivno rekurzivnu funkciju:

$$h(y,z) = \min_{t \leq z}\{Prost(t) \ \& \ t > y\}.$$

i uvedimo još jednu primitivno rekurzivnu funkciju:

$$k(x) = h(x, x! +1).$$

Sada rekurzivne jednačine koje definišu proste brojeve postaju:

$$p_0=0,$$
$$p_{n+1}=k\,(p_n),$$

tako da je p_n primitivno rekurzivna funkcija.

Razmotrimo sada slučaj minimalizacije bez ograničenja.

Sa

$$\min_y P(x_1,...,x_n,y)$$

označićemo najmanju vrijednost za y za koji je predikat P istinit, ako takva vrijednost postoji. Ako ne postoji vrijednost y za koju je $P(x_1,...,x_n,y)$ istinito onda je $\min_y P(x_1,...,x_n,y)$ nedefinisano. Ovakva neograničena minimalizacija može generisati funkcije koje nijesu totalne.

Na primjer,

$$x - y = \min_z \{ y + z = x \}$$

je nedefinisano za $x < y$. Kao što ćemo vidjeti kasnije, postoje primitivno rekurzivni predikati $P(x,y)$ takvi da $\min_y P(x,y)$ jeste totalan ali ne i primitivno rekurzivan predikat. Međutim, može se dokazati sljedeća teorema:

Teorema 7.2. Ako je $P(x_1,...,x_n,y)$ izračunljiv predikat i ako je:

$$g(x_1,...,x_n)=\min_y P(x_1,...,x_n,y) \ ,$$

onda je g parcijalno izračunljiva funkcija.

Dokaz. Sljedeći program izračunava funkciju g:

[A] IF $P(X_1,...,X_n,Y)$ GOTO E
$Y \leftarrow Y +1$
GOTO A

Time je dodaz zavšen.

Vježbe

1. Neka $h(x)$ određuje cio broj n takav da je $n \le \sqrt{2}\, x < n + 1$.Pokazati da je $h(x)$ primitivno rekurzivna.

2. Broj p se naziva "veći prost blizanac" od prostih brojeva p i p-2. (5,7 i 17,19 su blizanci).

Neka je $T(0) = 0$, $T(n)$ = n-ti veći prost blizanac. Vjeruje se, iako nije dokazano, da ima beskonačno ovakvih blizanaca. Uz pretpostavku da je tvrdnja tačna, dokazite da je $T(n)$ izračunljiva funkcija.

3. Neka je $u(n)$, n-ti broj po veličini u nizu brojeva koji su jednaki sumi dva kvadrata (Pitagorini brojevi). Pokazati da je $u(n)$ primitivno rekurzivna funkcija.

4. Neka je $R(x,t)$ primitivno rekurzivan predikat.

Neka je $g(x,y) = \max_{t \le y} R(x,t)$, to jest, $g(x,y)$ je najveća vrijednost za $t \le y$ za koju je $R(x,t)$ istinito, a ako takvo t ne postoji, $g(x,y)=0$. Dokazati da je $g(x,y)$ primitivno rekurzivna funkcija.