GLAVA 1

Malo čiste matematike

Nema ništa praktičnije od dobre teorije.
Leonardo Da Vinči

7. Matematička indukcija

Matematička indukcija predstavlja jedna važan metod dokazivanja iskaza u obliku $(\forall n)P(n)$, gdje je P neki predikat na N. Metoda se sastoji u dokazivanju u dva koraka:

Korak 1: Dokazati $P(0)$

Korak 2: Dokazati $(\forall n)$ (Ako je $P(n)$ onda je $P(n+1)$).

Ako se dokažu predhodne dvije tvrdnje tada se može smatrati da je dokazano i $(\forall n)P(n)$.

Izgleda paradoksalno, ali je često slučaj, da je lakše dokazati neku tvrdnju ako se ona prethodno učini strožijom. Umjesto da dokažemo $(\forall n)P(n)$, dokazujemo "strožije" $(\forall n)P(n)\&Q(n)$.

Pokazaćemo primjenu indukcije na dva primjera.

Teorema 7.1 Za svako $n\in N$ imamo da je $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=(n+1)^2$.

Dokaz. Za $n=0$, teorema tvrdi da je 1 = 1^2, sto je istinito.

Pretpostavimo da je teorema istinita za neko $n=k$. Onda je

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1)=(k+1)^2.$$

Sada možemo pisati

$$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)=\sum_{i=0}^{k}(2i+1)+2(k+1)+1$$

$$=(k+1)^2+2(k+1)+1$$

$$=(k+2)^2.$$

što dokazuje da je teorema istinita i za $n=k+1$.

Jedna druga forma matematičke indukcije koja se koristi često, naziva se potpunom indukcjom. U ovom slučaju se dokazuje samo jedna tvrdnja:

$$(\forall n)[ako\ (\forall m)_{m<n} P(m)\ onda P(n)],$$

pa ako se pokaže istinitom, tada se smatra i da je ($\forall n$)P(n) istinito.

Teorema 7.2 Ne postoji riječ $x\in\{a,b\}^*$ takva da je $ax = xb$.

Dokaz. Posmatrajmo sljedeći predikat: Ako je $x\in\{a,b\}^*$ i $|x|=n$, onda je $ax\neq xb$. Pokazaćmo da je ovo istinito za svako $n\in N$.

Pretpostavimo da je predhodni predikat istinit za svako $m < k$, za neko k, te da iz toga slijedi da je istinito i za $m=k$. Dokaz će biti izveden kontradikcjom.
Tako, sada pretpostavimo da je $|x| = k$ i da je $ax=xb$. Iz posljednje jednačine slijedi da je a prvi, a b posljednji simbol riječi x. Zato možemo pisati $x=aub$. Tada je $aaub = aubb$, odnosno, $au = ub$. Ali, $|u|<|x|$. Po indukconoj hipotezi $au\neq ub$. Ova kontradikcija dokazuje teoremu.

Sada ćemo dokazati istu teoremu potpunom indukcjom.

Pretpostavimo da postoji riječ $x\in\{a,b\}^*$ takva da je $ax=xb$. Onda mora postojati takva riječ najmanje duzine. Neka je x ta riječ. Tada je $ax=xb$, ali kao je $|u| < |x|$ onda je $au\neq ub$. Međutim iz $ax=xb$ slijedi $x=aub$, tako da je $au=ub$ i $|u|<|x|$. Ova kontradikcija dokazuje teoremu.

Vjezbe

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je zbir prvih n prirodnih brojeva jednak $n(n+1)/2$.
2. Dokazati da ne postoje riječi $x,y\in\{a,b\}^*$ takve da je $xay=ybx$.
3. Evo jednog nekorektnog dokaza matematičkom indukcijom kojim se dokazuje da su svi cvjetovi iste boje! [ta je u ovom "dokazu" pogrešno ?

Teorema o cvjetovima.

Ako je S skup cvjetova od tačno n elemenata, onda svi cvjetovi iz skupa S imaju istu boju.

"Dokaz".
Korak 1: Teorema je, očigledno, istinita za $n=1$.
Korak 2: Pretpostavimo da je istinita i za $n=k$. Neka je, sada, S skup od $k+1$ cvjetova, Ako uklonimo jedan cvijet iz skupa S dobićemo skup od k elemenata. Na osnovu indukcione hipoteze svi ovi cvjetovi su iste boje. Vratimo sada uklonjeni cvijet nazad u skup S i uklonimo neki drugi cvijet. Prema indukcionoj hipotezi ponovo su svi cvjetovi u skupu iste boje. Tako smo za oba uklonjena

cvijeta dobili da su iste bojesa svim ostalim cvjetovima. Dakle, svi cvjetovi iz skupa S su iste boje.