GLAVA 1

Malo čiste matematike

Nema ništa praktičnije od dobre teorije.
Leonardo Da Vinči

5. Kvantifikatori

Sada ćemo se baviti predikatima na skupu N^m (m-arnim predikatima na skupu N) za razne vrijednosti m.

Neka je $P(t,x_1,...,x_n)$ $(n+1)$-arni predikat. Posmatrajmo predikat $Q(y,x_1,...,x_n)$ definisan sa:

$$Q(y,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow P(0,x_1,...,x_n) \vee P(1,x_1,...,x_n) \vee ... \vee P(y,x_1,...,x_n).$$

Predikat $Q(y,x_1,...,x_n)$ je istinit ako i samo ako postoji neko $t \leq y$, takvo da je $P(t,x_1,...,x_n)$ istinito. Predikat Q sada možemo napisati u obliku:

$$(\exists t)_{\leq y} P(t,x_1,...,x_n).$$

Izraz $(\exists t)_{\leq y}$ se naziva ograničenim egzistencijalnim kvantifikatorom.

Slično, pišemo:

$(\forall t)_{\leq y} P(t,x_1,...,x_n)$ za predikat

$$P(0,x_1,...,x_n) \& P(1,x_1,...,x_n) \& ... \& P(y,x_1,...,x_n).$$

Ovaj predikat je istinit ako i samo ako je $P(t,x_1,...,x_n)$ istinit za svako $t \leq y$. Izraz $(\forall t)_{\leq y}$ se naziva ograničenim univerzalnim kvantifikatorom.

Pišemo:

$$Q(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow (\exists t) P(t,x_1,...,x_n)$$

za predikat koji je istinit ako postoji $t \in N$ za koji je $P(t,x_1,...,x_n)$ istinit.
Slično, predikat $(\forall t) P(t,x_1,...,x_n)$ je istinit ako je $P(t,x_1,...,x_n)$ istinit za svako $t \in N$.

Za kvantifikatore važe generalizovana De Morganova pravila:

$$\sim(\exists t)_{\leq y} P(t,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow (\forall t)_{\leq y} \sim P(t,x_1,...,x_n)),$$
$$\sim(\exists t) P(t,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow (\forall t) \sim P(t,x_1,...,x_n)),$$