GLAVA 4

Univerzalni program

Nesavršenstvo nije negacija savršenstva.
To se samo cjelina iskazuje u djelovima,
to se beskraj otkriva u granicama.
Rabindranat Tagore

1. Kodiranje parova i Gedelovi brojevi

U ovom poglavlju proučićemo dva algoritma za kodiranje i pokazati da su ovi algoritmi primitivno rekurzivne funkcije.

Prvi algoritam služi za kodiranje parova brojeva, odnosno, vrši transformaciju $(x,y) \rightarrow z$, gdje je (x,y) par brojeva, a z broj kojim se par kodira.

Definišimo primitivno rekurzivnu funkciju:

$$< x, y > = 2^x(2y+1) - 1. \qquad (1.1)$$

Ako je z bilo koji dati broj, tada postoji jedinstveno rješenje jednačine:

$$< x, y > = z, \qquad (1.2)$$

odnosno: x je najveći broj takav da je $2^x|(z+1)$, a y je rješenje jednačine:

$$2y + 1 = (z+1)/2^x .$$

Posljednja jednačina ima (jedinstveno) rješenje, jer $(z+1)/2^x$ mora biti neparno.

Prema tome jednačina (1.2) definiše funkcije:

$$x = l(z),\ y = d(z).$$

Iz jednakosti (1.1) proizilazi da je:

$$l(z) \leq z,\ d(z) \leq z.$$

Zato možemo pisati:

$$l(z) = \min_{x \leq z} \{ (\exists y)_{\leq z} (z = < x, y >)\},$$

$$d(z) = \min_{y\leq z}\{(\exists x)_{\leq z}(z = <x, y>)\},$$

što znači da su l(z) i d(z) primitivno rekurzivne funkcije.
Funkcija l(z) definiše "lijevi", a d(z) "desni" član para (x,y).

Prethodno razmatranje možemo sumirati u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.1 Funkcije $< x, y >$, l(z), d(z) imaju sljedeća svojstva:

1. sve su primitivno rekurzivne.

2. $l(< x ,y >) = x$; $d(< x , y >) = y$.

3. $< l(z), d(z) > = z$.

4. $l(z), d(z) \leq z$.

Sada ćemo definisati jednu primitivno rekurzivnu funkciju koja kodira i dekodira proizvoljan niz brojeva. Metod koji ćemo prikazati, a koji je prvi je koristio Gedel, zasniva se na faktorizaciji brojeva prostim brojevima.
Za niz $(a_1,...,a_n)$, definisaćemo Gedelov broj $[(a_1,...,a_n)]$, na sljedeći način:

$$[(a_1,...,a_n)] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}.$$

Tako je, na primjer, Gedelov broj niza (3, 1, 5, 4, 6) je:

$$[3, 1, 5, 4, 6] = 2^3*3^1*5^5*7^4*11^6.$$

Za fiksno n funkcija $[(a_1,...,a_n)]$ je očigledno primitivno rekurzivna.
Za Gedelove brojeve važi sljedeća teorema o jedinstvenosti.

Teorema 1.2. Ako je $[(a_1,...,a_n)] = [(b_1,...,b_n)]$, onda je

$$a_i = b_i, \quad i = 1,...,n.$$

Ovaj rezultat je direktna posljedica jedinstvenosti faktorizacije brojeva pomoću prostih brojeva i ponekad se naziva fundamentalnom teoremom aritmetike. Dokaz se može naći u knjigama o elementarnoj teoriji brojeva.
Treba uočiti da je:

$$[(a_1,...,a_n)]= [(a_1,...,a_n,0)] \qquad (1.3)$$

jer je $p_{n+1}^0 = 1$. Isto važi i za proizvoljan konačan broj nula dodatih na kraj niza brojeva. Pošto je:

$$1 = 2^0 = 2^0*3^0 = 2^0*3^0*5^0 = ...,$$

prirodno je, i korisno, posmatrati 1 kao Gedelov broj "praznog" niza dužine 0. Međutim, ako se doda nula sa lijeve strane niza Gedelov broj će se promijeniti.
Na primjer,

$$[2, 3] = 2^2 * 3^3 = 108,$$

$$[2, 3, 0] = 2^2 * 3^3 * 5^0 = 108,$$

ali,

$$[0, 2, 3] = 2^0 * 3^2 * 5^3 = 1125.$$

Sada kada smo pronašli način kako da se pomoću primitivno rekurzivne funkcije jednoznačno kodira niz brojeva, pokušajmo da nađemo primitivno rekurzivnu funkciju koja obavlja inverznu operaciju, odnosno vrši dekodiranje.
Neka je

$$x = [a_1, \ldots, a_n].$$

Definišimo funkciju $(x)_i = a_i$. Jasno je da je:

$$(x)_i = \min_{t \leq x} (\sim p_i^{t+1} | x)$$

gdjer je p_i i-ti prost broj, pa je funkcija $(x)_i$ za dekodiranje takođe primitivno rekurzivna.

Zapazimo da je $(x)_0 = 0$.

Koristićemo takođe i primitivno rekurzivnu funkciju

$$D(x) = \min_{i \leq x}((x)_i \neq 0 \ \& \ (\forall j)_{\leq x}(j \leq i \vee (x)_j = 0)).$$

Funkcija D zapravo definiše dužinu niza $[a_1, \ldots, a_n]$, uz manje specifičnosti:

$$D([a_1, \ldots, a_n]) = n \quad \text{ako i samo ako je } a_n \neq 0.$$

$$D(0) = D(1) = 0.$$

Osobine funkcija za kodiranje i dekodiranje niza brojeva sumiraćemo u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.3. (Teorema o nizu) Za Gedelove brojeve važi:

a. $([(a_1, \ldots, a_n)])_i = \begin{cases} a_i & \text{ako je } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$

b. $[(x)_1, \ldots, (x)_n] = x$ ako je $n \geq D(x)$.