GLAVA 2

Programi i izračunljive funkcije

I cijeli ovi besporeci
po poretku nekome sljeduju.
Nad svom ovom grdnom mješavinom
opet umna sila toržestvuje.

Njegoš

4. Izračunljive funkcije

Za svaki program napisan u jeziku S kažemo da izračunava neku funkciju (sa jednom ili više varijabli). Sada ćemo pojam izračunavanja funkcije učiniti preciznijim.

Neka je Π bilo koji program, napisan u jeziku S, i neka su $r_1,\ldots,r_m$, m datih brojeva. Formirajmo stanje:

$s_1 = (1, \sigma) = \{1, \{X_1 = r_1, X_2 = r_2, \ldots, X_m = r_m, Y = 0\}\}$.

Stanje s_1 zvaćemo **početnim stanjem** programa. Sada možemo razlikovati dva slučaja:

Slučaj 1. Postoji izračunavanje $s_1,s_2,\ldots,s_k$ programom Π, odnosno program Π završava rad poslije k koraka (trenutnih stanja) za date početne vrijednosti varijabli. Sa $\Psi^{(m)}_\Pi(r_1,\ldots,r_m)$ označićemo vrijednost izlazne varijable Y, koja se dobija pri završetku programa.

Slučaj 2. Ne postoji izračunavanje, to jest, postoji beskonačan niz $s_1,s_2,s_3,\ldots$ trenutnih stanja pri izvršavanju programa Π, za date početne vrijednosti. Tada kažemo da je

$\Psi^{(m)}_\Pi(r_1,\ldots,r_m)$ nedefinisano.

Tada kažemo da program Π izračunava funkciju $\Psi^{(m)}_\Pi(x_1,\ldots,x_m)$.

Za bilo koju parcijalnu funkciju g od m promjenjivih kažemo da je **parcijalno izračunljiva** ako postoji program Π takav da je:

$$g(r_1,\ldots,r_m) = \Psi^{(m)}_\Pi(r_1,\ldots,r_m), \text{ za svako } r_1,\ldots,r_m.$$

Gornja jednakost treba da bude shvaćena tako da važi, ne samo kada je funkcija definisana, već i kada je nedefinisana. Drugim riječima kada je funkcija g definisana program izračunava njenu vrijednost, a kada je nedefinisana, program ima beskonačno izvršavanje.

Funkcija je **izračunljiva** ako je parcijalno izračunljiva i totalna.

Parcijalno izračunljive funkcije se nazivaju i **parcijalno rekurzivnim** funkcijama.

Funkcije koje su parcijalno **rekurzivne i totalne** nazivaju se **rekurzivnim** funkcijama.

Razlozi za ovakvu terminologiju su istorijski i o njima će biti riječi kasnije.

U poglavlju 2. prikazan je jedan manji skup parcijalno izračunljivih funkcija: x, x+y, x*y, x - y. Sve, osim posljednje, su totalne, a time i izračunljive.

Teorija izračunljivoti (koja se ponekad naziva i teorijom rekurzije) proučava klasu parcijalno izračunljivih funkcija. Da bi opravdali naziv teorije, potrebno je da pokažemo, da za svaku funkciju koja "intuitivno" izgleda izračunljivom, postoji program u jeziku S koji je izračunava. To ćemo, u sljedećim poglavljima, i uraditi.

Završićemo ovo poglavlje sa jednim specifičnim programom u jeziku S:

```
[A]   X ← X + 1
      IF X ≠ 0 GOTO A
```

Za ovaj program Π, $\Psi^{(1)}{}_{\Pi}(x)$ je nedefinisano za svako x. Zato i nigdje definisana funkcija mora biti uključena u klasu parcijalno izračunljivih funkcija.

Vježbe

1. Neka je Π program (b) iz poglavlja 2. Napisite niz svih trenutnih stanja programa pri njegovom izvršavanju počev od stanja $\{1,\{$ X=2, Y=0,Z=0$\}\}$.
2. Neka je Π sljedeći program:

```
      IF X ≠ 0 GOTO A
[A]   X ← X + 1
      IF X ≠ 0 GOTO A
      Y ← Y + 1
```

Šta je $\Psi^{(1)}{}_{\Pi}(x)$?

3. Isto kao u zadatku 2. za program:

```
[B]   IF X ≠ 0 GOTO A
      Z ← Z + 1
      IF Z ≠ 0 GOTO B
[A]   X ← X + 1
```

4. Isto kao u zadatku 2. za "prazan program".