Primitivno rekurzivne funkcije

Može li biti veličanstveno ono što nije jednostavno?
Šandor Petefi

6. Iteracije i ograničeni kvantifikatori

Teorema 6.1. Neka je ζ PRZ klasa. Ako $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ pripada klasi ζ, onda klasi ζ pripadaju i funkcije:

$$g(y, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n), \text{ i}$$

$$h(y, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti tako što ćemo pokazati rekurzivne forme funkcija g i h.

(Napomena: Bilo bi pogrešno pokušati da se teorema 6.1. dokaže indukcijom, jer se na taj način može pokazati samo da su svaka od funkcija $g(0, x_1, \ldots, x_n)$, $g(1, x_1, \ldots, x_n)$,... primitivno rekurzivne, ali ne i funkcija $g(y, x_1, \ldots, x_n)$.).

Rekurzivni oblik funkcije g je:

$$g(0, x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_1, \ldots, x_n)$$
$$g(t+1, x_1, \ldots, x_n) = g(t, x_1, \ldots, x_n) + f(t+1, x_1, \ldots, x_n).$$

Slično za funkciju h imamo:

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_1, \ldots, x_n)$$
$$h(t+1, x_1, \ldots, x_n) = h(t, x_1, \ldots, x_n) * f(t+1, x_1, \ldots, x_n)$$

što dokazuje našu tvrdnju.

Ponekad se sumiranje (i množenje) vrše sa početnim indeksom 1 (umjesto 0). Tada se za početne vrijednosti funkcija g i h uzima:

$$g(0, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

a ostale jednakosti kao i u predhodnom slučaju.

Teorema 6.3. Ako predikat $P(t,x_1,...,x_n)$ pripada nekoj PRZ klasi ζ, onda klasi ζ pripadaju i predikati:

$$(\forall t)_{\leq y}P(t,x_1,...,x_n) \text{ i } (\exists t)_{\leq y}P(t,x_1,...,x_n) .$$

Dokaz. Potrebno je samo da uočimo da je:

$$(\forall t)_{\leq y}P(t,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow [\prod_{t=0}^{y} P(t,x_1,...,x_n)] = 1$$

$$\exists t)_{\leq y}P(t,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow [\sum_{t=0}^{y} P(t,x_1,...,x_n)] \neq 0$$

Napomena: Za univerzalni kvantifikator bilo je zapravo dovoljno napisati jednačinu:

$$(\forall t)_{\leq y}P(t,x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \prod_{t=0}^{y} P(t,x_1,...,x_n) .$$

Ponekad je potrebno teoremu 6.3. koristiti u obliku:

$$(\forall t)_{<y} \quad \text{i} \quad (\exists t)_{<y}.$$

Teorema 6.3. vazi i u tom slučaju jer je:

$$(\forall t)_{<y}P(t,x_1,...,x_n)\Leftrightarrow(\forall t)_{\leq y}P\{t \neq y \vee P(t,x_1,...,x_n)\}$$
$$(\exists t)_{<y} P(t,x_1,...,x_n)\Leftrightarrow(\exists t)_{\leq y}P\{t = y \ \& \ P(t,x_1,...,x_n)\}$$

.

Nastavljamo sa listom primitivno rekurzivnih funkcija.

12. Predikat $y|x$ (y je djelilac od x). Na primjer predikat $3|12$ je istinit, a predikat $3|13$ je neistinit. Rekurzivni oblik predikata $y|x$ je:

$$y|x\Leftrightarrow(\exists t)_{\leq x}(y*t = x) .$$

13. Prost(x). Predikat kojim ima vrijednost TRUE ako je x prost broj, FALSE ako x nije prost broj.

$$Prost(x)\Leftrightarrow x>1\&(\forall t)_{\leq x}\{t =1 \vee t = x \vee \sim(t|x)\}.$$

Vježbe

1. Neka je $f(x) = 2x$, ako je x perfektan kvadrat, a $f(x) = 2x+1$ inače. Pokazati da je $f(x)$ primitivno rekurzivna funkcija.
2. Neka je $\sigma(x)$ suma divizora od x. (Npr. $\sigma(6) =1+2+3+6=12$). Pokazati da je $\sigma(x)$ primitivno rekurzivna funkcija.

3. Neka je $\pi(x)$ broj prostih brojeva koji su $\leq x$. Pokazati da je $\pi(x)$ primitivno rekurzivna funkcija.
4. Neka ke SQSM(x) istinito ako je x suma dva perfektna kvadrata, a neistinito inače. Pokazati da je SQSM(x) primitivno rekurzivna funkcija.