GLAVA 1

Malo čiste matematike

Nema ništa praktičnije od dobre teorije.
Leonardo Da Vinči

2. Funkcije

Funkcije igraju važnu ulogu u skoro svim oblastima čiste i primijenjene matematike. Funkciju možemo definisati kao skup f, čiji su svi elementi uređeni parovi sa sljedećim svojstvom:

$$(a,b)\in f \wedge (a,c)\in f \Rightarrow b=c.$$

Međutim, intuitivni pojam funkcije postaje mnogo jasniji ako parove (a,b) predstavimo tabelarno. Za funkciju f, može se napisati $f(a)=b$, sa značenjem da je $(a,b)\in f$. Iz gornje definicije funkcije proističe, da za svaku vrijednost a, može postojati samo jedna vrijednost b takva da je $(a,b)\in f$. Skup svih a, takvih da je $(a,b)\in f$, nazivamo domenom funkcije, a skup svih $f(a)$, za svako a, rangom ili skupom vrijednosti (antidomenom) funkcije f.

Na primjer, neka je f skup uređenih parova (n,n^2) za sve $n\in N$. Tada je, za svako $n\in N$, $f(n)=n^2$. Domen funkcije f je N, a opseg skup svih tačnih kvadrata.

Funkcije f se često definišu pomoću **algoritma** kojim se opisuje procedura dobijanja $f(a)$ iz a. Algoritamski metod zadavanja funkcija posebno je značajan u kompjuterskim naukama. Međutim, kako ćemo pokazati u Glavi 4, moguće je da imamo algoritam koji zadaje neku funkciju, a da pri tome ne možemo odrediti njen domen. U takvim slučajevima govorimo o parcijalnim funkcijama.

Parcijalne funkcije zauzimaju centralno mjesto u teoriji izračunljivosti. Parcijalna funkcija na skupu S je, jednostavno, funkcija čiji je domen podskup skupa S. Kao primjer parcijalne funkcije na skupu N, uzmimo funkciju $g(n)=\sqrt{n}$, gdje je domen funkcije g skup perfektnih kvadrata. Ako je f parcijalna funkcija na skupu S, i $a\in S$, tada pišemo $f(a)\downarrow$ i kazemo da je $f(a)$ definisano, to jest da je a u domenu. Ako a nije u domenu, tada pišemo $f(a)$ i kažemo da je $f(a)$ nedefinisano. Ako parcijalna funkcija na skupu S ima domen S, tada kažemo da je ona totalna. Na kraju, prazan skup je takođe funkcija. Posmatran kao parcijalna funkcija na nekom skupu S, ova funkcija nije nigdje definisana.

Za parcijalnu funkciju f na Dekartovom proizvodu $S_1\times S_2\times..\times S_n$, uobičajeno je da pišemo $f(a_1,a_2,...,a_n)$, umjesto dosljednijeg $f((a_1,a_2,...,a_n))$. Parcijalna funkcija f na skupu S^n naziva se n-arnom parcijalnom funkcijom na S, ili funkcijom od n varijabli na S.