GLAVA 1

Malo čiste matematike

Nema ništa praktičnije od dobre teorije.
Leonardo Da Vinči

6. Dokazivanje kontradikcijom

U nauci, posebno u matematici, često se koriste iskazi pod nazivom teorema, lema, posljedica, za koje je potrebno dokazati njihovu istinitost. Zašto su dokazi potrebni? Pokazaćemo to na jednom primjeru.

Posmatrajmo iskaz: brojevi oblika $n^2 - n + 41$ su prosti brojevi za svako $n \in N$.

Da li je ovaj iskaz istinit? Ako bi pojedinačnom provjerom testirali ovaj iskaz za $n = 0, 1, 2, ..., 40$ ustanovili bi da je, u svim ovim slučajevima, iskaz istinit, što bi nas moglo navesti na pomisao da je istinit za svako $n \in N$. Međutim, nije tako. Za $n = 41$ iskaz postaje

$$41^2 - 41 + 41 = 41^2$$

što očigledno nije prost broj. Ovo je tipičan primjer kada se zaključivanjem na osnovu konačnog broja slučajeva, zaključuje (generalizacijom) da je iskaz istinit u svim slučajevima. Zato je neophodno izvoditi pravilno dokazivanje zasnovano na ispravnom formalno-logičkom postupku.

Dokaz počinje sa nekim početnim iskazima iz kojih se, logičkim rezonovanjem, dolazi do novih iskaza. Ako se početni iskazi usvoje kao istiniti, onda se mogu kao istiniti, prihvatiti i svi iskazi koji iz njih proističu korisčenjem logičkog rezonovanja. Međutim, ovakav, direktani, metod dokazivanja nije uvijek moguć. Zato su razvijene druge metode dokazivanja, a dvije, najčesće korišćene, su metod kontradikcije i matematička indukcija. Ove metode će sada biti razmotrene.

Pri dokazivanju kontradikcijom, počinje se sa pretpostavkom da je iskaz koji se dokazuje neistinit. Na taj način imamo dva početna iskaza: sam iskaz koji se dokazuje i njegovu negaciju. Izvođenjem novih iskaza direktnom metodom, polazeci od pocetnih iskaza, pokušavamo da dođemo do dva iskaza koji jedan drugom protivurječe (kontadikcija), pa kako oba ne mogu biti istinita, zaključujemo da nam je osnovna pretpostavka o neistinitosti iskaza pogrešna, pa zaključujemo da je osnovni iskaz istinit. Ovaj metod dokazivanja poznat je i kao "reductio ad absurdum" i često se primjenjuje i u drugim oblastima (pravničkom rezonovanju, npr.).

Pokazaćemo primjenu ovog metoda na dva primjera.

Iskaz. Jednačina $2 = (m/n)^2$ nema rješenja za $m, n \in N$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da gornja jednačina ima rješenja. Ako je tako, onda m i n nijesu istovremeno parni brojevi (tada bi razlomak m/n mogli da uprostimo). Gornja jednačina se moze prikazati u obliku:

$$m^2 = 2n^2$$

iz čega pravilno zaključujemo da je m^2 paran broj, pa i m mora biti paran broj. Tada m možemo prikazati u obliku $m = 2k$, pa jednačina postaje: $m^2 = 4k^2 = 2n^2$, odnosnio $n^2 = 2k^2$. Prema tome i n je paran broj.

Ovo je u kontradikciji sa gore izvedenom tvrdnjom da n i m ne mogu biti istovremeno parni brojevi. Kontradikcija koja "obara" pretpostavku da osnovni iskaz nije istinit. Dakle, osnovni iskaz je istinit.

Teorema 6.1 Neka je $x \in \{a, b\}^*$, takvo da je $xa = ax$. Tada je $x = a^{[n]}$ za neko $n \in N$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $xa = ax$ ali da x moze sadržati i slovo b. Tada je x oblika $x = a^{[n]}bu$, gdje smo eksplicitno pokazali prvo pojavljivanje slova b u x. Onda je

$$a^{[n]}bua = aa^{[n]}bu = a^{[n+1]}bu, \text{ ili}$$
$$bua = abu.$$

Ali ovo je nemoguće, jer riječ ne može istovremeno počinjati sa dva različita slova. Ova kontradikcija dokazuje teoremu.

Vjezbe

1. Dokazati da jednačina $(p/q)^2 = 3$ nema rješenja za $p,q \in N$.
2. Dokazati da ako je xÎ{a,b}* i abx = xab, onda je $x=(ab)^{[n]}$ za neko nÎN.